

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET"

TESTARE ÎN VEDEREA TRANSFERULUI

23 august 2024

CLASA a XII-a

Matematică-Informatică

I.1. (40p) Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a + 1)y - 2z = a \end{cases}$$
 și matricea

$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a + 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$, unde a este de tip a este număr real.

(10 p) a) Calculați $\det(A(2))$.

(10 p) b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

(10 p) c) Determinați matricea $X \in M_3(\mathbf{R})$ pentru care $X \cdot A(2) = A(-3)$.

(10 p) d) Dacă $a = -2$ arătați că $x_0 \cdot z_0 + y_0 = -2$ pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații.

II.1. (10 p) Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ dat de $a_1 \in (0, 1)$ și $a_{n+1} = a_n \cdot (1 - \sqrt{a_n})$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent.

2. (20p) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{2x}$.

(10 p) a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

(10 p) b) Determinați imaginea funcției f .

3. (20p) Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(2x + e), & \text{dacă } x > 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

a). (10p) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

b). (10p) Calculați $f'(-1) + f'(1)$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 minute.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

BAREM DE CORECTARE – CLASA A XII-A

$$I.1. a) A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (3p) \Rightarrow \det(A(2)) = 4 + 6 + 4 + 4 - 12 + 2 \quad (5p)$$

$$= 8 \quad (2p)$$

$$b) \det(A(a)) = -a^2 + 2a + 8, \text{ pentru orice număr real } a. \quad (4p)$$

$$\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ sau } a = 4 \quad (4p)$$

$$A(a) \text{ este inversabilă} \Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\} \quad (2p)$$

$$c) \det(A(2)) = 8 \neq 0 \Rightarrow A(2) \text{ este matrice inversabilă și prin urmare, } X = A(-3) \cdot (A(2))^{-1}. \quad (2p)$$

$$A^t(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^*(2) = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}(2) = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow (5p)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{25}{8} & \frac{7}{2} & \frac{15}{8} \\ -\frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (3p)$$

$$d) \text{ dacă } a = -2 \Rightarrow \text{soluția sistemului de ecuații are forma } (2, -2-2\alpha, \alpha), \text{ cu } \alpha \in \mathbb{C}. \quad (6p) \Rightarrow x_0 \cdot z_0 + y_0 = 2\alpha - 2 - 2\alpha = -2, \text{ pentru orice soluție } (x_0, y_0, z_0) \text{ a sistemului de ecuații.} \quad (4p)$$

II.1. Demonstrația prin inducție matematică a propoziției $P_n: a_n \in (0, 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit. **(4p)**

Din relația de recurență avem că $a_{n+1} - a_n = -a_n \sqrt{a_n} < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir strict descrescător. **(4p)**

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir monoton și mărginit \Rightarrow șirul este convergent, conform proprietății lui Weierstrass. **(2p)**

$$2. a) f'(x) = 2 \cdot (x^2 + x - 2) \cdot e^{2x} \quad (5p)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{2 \cdot (x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot (1 - \frac{2}{x^2})}{2 \cdot x^2 \cdot (1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \frac{1}{2}. \quad (5p)$$

$$b) f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ sau } x = 1 \quad (2p)$$

Pentru $x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$ avem că $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe $(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$. **(2p)**

Pentru $x \in [-2; 1]$ avem că $f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe $[-2; 1]$. **(2p)**

Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(-2) = \frac{2}{e^4}$, $f(1) = -e^2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și f este

continuă \Rightarrow imaginea funcției f este $[-e^2, \infty)$. **(4p)**

$$3. a) l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 1 \Rightarrow f \text{ este continuă în } x_0 = 0. \quad (4p)$$

$$\text{Dar } f'_s(0) = -\frac{3}{2} \text{ și } f'_d(0) = \frac{2}{e} \quad (4p) \Rightarrow f \text{ nu este derivabilă în punctul } x_0 = 0. \quad (2p)$$

$$\mathbf{b) } f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x+e}, \mathbf{dac\ddot{a} } x > \mathbf{0} \\ \frac{-e^{-x} \cdot (x+1) + (2x+1) \cdot e^{-2x}}{x^2}, \mathbf{dac\ddot{a} } x < \mathbf{0} \end{cases} . \mathbf{(6p)}$$

$$\text{Avem } f'(1) = \frac{2}{2+e} \text{ \u015fi } f'(-1) = -e^2 \Rightarrow f'(-1) + f'(1) = \frac{-e^3 - 2e^2 + 2}{e+2}. \mathbf{(4p)}$$