Formula binomului lui Newton

Dezvoltarea completă a lui $(a+b)^n$. Coeficienții sunt combinările C_n^k, exponenții se distribuie: pe a descrește de la n la 0, pe b crește de la 0 la n.

Formula completă
condiție: $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Dezvoltare explicită

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

Pentru $(a-b)^n$
condiție: semnul alternează: $+, -, +, -, \ldots$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Caz particular $(1+x)^n$
condiție: cea mai des folosită formă la BAC

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

Termenul general T_{k+1}

Numerotarea termenilor pornește de la T_1 (corespunde lui $k=0$). Termenul T_{k+1} este al $(k+1)$-lea, conține coeficientul C_n^k. Aceasta este formula pe care o aplici în 90% din problemele cu binom.

Termenul general în $(a+b)^n$
condiție: $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Coeficientul lui x^p în $(1+x)^n$
condiție: decurge direct din termenul general cu $a=1$, $b=x$

$$\text{coeficient}(x^p) = C_n^p$$

Coeficientul lui x^p în $(1+ax)^n$

$$\text{coeficient}(x^p) = C_n^p \cdot a^p$$

Termenul median

$$T_{\frac{n}{2}+1} \text{ pentru } n \text{ par}, \quad T_{\frac{n+1}{2}} \text{ și } T_{\frac{n+3}{2}} \text{ pentru } n \text{ impar}$$

Proprietățile coeficienților binomiali

Combinările C_n^k formează triunghiul lui Pascal — fiecare rând începe și se termină cu 1, iar restul se obține prin suma celor doi de deasupra.

Definiția combinărilor
condiție: $0 \le k \le n$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Simetria
condiție: termenii echidistanți de capete au același coeficient

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Formula lui Pascal condiție: regula de construcție a triunghiului	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
Suma coeficienților binomiali condiție: se obține înlocuind $a = b = 1$ în formula binomului	$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$
Suma alternată condiție: $n \geq 1$; se obține cu $a = 1$, $b = -1$	$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$
Suma combinărilor de rang par condiție: $n \geq 1$; pare și impare au sumă egală	$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

Aplicații tipice la BAC

Cinci pattern-uri care acoperă majoritatea cerințelor BAC cu binom. Toate se reduc la formula termenului general cu o ecuație convenabilă pe k.

Termenul liber în $(x + 1/x)^n$ condiție: termen liber: $n - 2k = 0 \Rightarrow k = n/2$	$T_{k+1} = C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot x^{-k} = C_n^k \cdot x^{n-2k}$
Coeficient al lui x^p condiție: se cere k întreg și $0 \leq k \leq n$	$n - 2k = p \Rightarrow k = \dfrac{n-p}{2}$
Numărul de termeni din dezvoltare	$(a+b)^n$ are $n+1$ termeni
Derivarea sumei pentru identități condiție: trucul: $\sum k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$	$n \cdot (1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1}$