Ecuații fundamentale și soluțiile generale

Cele patru forme de bază. În toate formulele, k este un parametru întreg, $k \in \mathbb{Z}$, care indexează toate soluțiile.

$\sin x = a$
condiție: $|a| \le 1$; fără soluții dacă $|a| > 1$

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\cos x = a$
condiție: $|a| \le 1$; fără soluții dacă $|a| > 1$

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{tg} x = a$
condiție: $a \in \mathbb{R}$

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{ctg} x = a$
condiție: $a \in \mathbb{R}$

$$x = \operatorname{arcctg} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cazuri particulare — valori esențiale

Pentru valori uzuale ale lui a, soluțiile au formă compactă. Memorează aceste cazuri și nu mai apelezi la formula generală decât când a e o constantă neobișnuită.

$\sin x = 0$	$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Ecuații echivalente

Două ecuații trigonometrice cu aceeași funcție și aceeași bază au soluții comparabile direct, fără să dezvolți formula generală.

$\sin f(x) = \sin g(x)$ condiție: $k \in \mathbb{Z}$ — două serii de soluții	$f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ sau } f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$
$\cos f(x) = \cos g(x)$ condiție: $k \in \mathbb{Z}$ — două serii de soluții	$f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$
$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$ condiție: $k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = g(x) + k\pi$

Ecuații reductibile — tehnici uzuale

Trei tipare apar pe aproape orice ecuație trigonometrică complicată: substituție, descompunere și transformarea $a \sin x + b \cos x$ în formă cu un singur sinus.

Substituția $t = \sin x$ (sau $\cos x$, $\operatorname{tg} x$) condiție: verifici după rezolvare că $\lvert t\rvert \leq 1$ pentru sin/cos	$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0 \Rightarrow t = \sin x,\ at^2 + bt + c = 0$
Ecuația $a \sin x + b \cos x = c$ condiție: $\operatorname{tg} \varphi = b/a$; ecuație echivalentă cu $\sin(x+\varphi) = c/\sqrt{a^2+b^2}$	$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\varphi)$
Condiție de solubilitate	$a \sin x + b \cos x = c \text{ are soluție } \iff a^2 + b^2 \geq c^2$
Descompunere prin formule de transformare condiție: transformare sumă → produs — utilă când vrei să factorizezi	$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$
Ecuație omogenă în $\sin x$ și $\cos x$ condiție: verifici separat dacă $\cos x = 0$ e soluție	$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \Rightarrow \text{împarți cu } \cos^2 x, \text{ obții ecuație în } \operatorname{tg} x$