Vectori în plan — componente și operații

Un vector în plan are două componente. Pentru $\vec{AB}$ cu $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, componentele sunt $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Vectorul $\vec{AB}$ din coordonate	$\vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A)$
Suma a doi vectori	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)$
Produs cu un scalar condiție: $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1,\ \alpha u_2)$
Modulul (norma) condiție: lungimea geometrică a vectorului	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
Vectori coliniari condiție: echivalent: există α cu $\vec{u} = \alpha\vec{v}$	$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \iff u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$

Produsul scalar

Produsul scalar a doi vectori e un număr real care leagă mărimile vectorilor și unghiul dintre ei. Esențial pentru a calcula unghiuri și pentru a testa perpendicularitatea.

Produsul scalar din coordonate	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$
Forma geometrică condiție: θ — unghiul dintre vectori	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\theta$
Vectori perpendiculari	$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$
Unghiul dintre doi vectori	$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$
Modulul prin produs scalar	$\lvert\vec{u}\rvert^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

Ecuațiile dreptei în plan

Patru forme echivalente, alegi care e cea mai convenabilă pentru datele din enunț. Toate descriu aceeași dreaptă; treci între ele algebric.

Ecuația redusă (pantă-tăietură) condiție: m — panta, n — ordonata la origine	$y = mx + n$

Ecuația generală condiție: a, b nu sunt simultan zero; vector normal (a, b)	$ax + by + c = 0$
Ecuația dreptei prin punct cu pantă condiție: trece prin (x_0, y_0) și are panta m	$y - y_0 = m(x - x_0)$
Ecuația dreptei prin două puncte condiție: $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
Panta dintre două puncte condiție: $x_1 \neq x_2$ (altfel dreapta e verticală, fără pantă)	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Poziții relative — paralele, perpendiculare

Două drepte pot fi paralele, perpendiculare sau secante. Criteriile depind de forma în care sunt scrise.

Drepte paralele (forma redusă) condiție: $d_i : y = m_i x + n_i$, $n_1 \neq n_2$ pentru drepte distincte	$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$
Drepte perpendiculare (forma redusă)	$d_1 \perp d_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$
Drepte paralele (forma generală)	$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \iff a_1b_2 - a_2b_1 = 0$
Drepte perpendiculare (forma generală)	$d_1 \perp d_2 \iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

Distanțe și aria triunghiului

Formula distanței dintre două puncte derivă direct din teorema lui Pitagora. Pentru aria unui triunghi prin coordonate, există o formulă cu determinant care economisește mult timp față de Heron sau bază·înălțime.

Distanța dintre două puncte	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Mijlocul unui segment	$M = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
Distanța de la punct la dreaptă condiție: $d : ax + by + c = 0,\ P(x_P, y_P)$	$d(P, d) = \dfrac{\lvert ax_P + by_P + c\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Aria unui triunghi prin coordonate condiție: modul determinantului împărțit la 2	$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left\lvert \det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{pmatrix}\right\rvert$

Aria — forma cu determinant 3×3

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}\right|$$

Trei puncte coliniare

condiție: echivalent cu aria triunghiului egală cu zero

$$A, B, C \text{ coliniare} \iff \det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = 0$$