

Tabel integrale nedefinite — funcții elementare

Pentru fiecare funcție elementară, o singură primitivă (familia completă se obține adăugând constanta C). Domeniul de validitate e marcat pe coloana din dreapta.

Putere

condiție: $n \neq -1$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Funcția 1/x

condiție: $x \neq 0$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Exponențiala naturală

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Exponențiala generală

condiție: $a > 0, a \neq 1$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Sinus

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Cosinus

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Pătratul secantei

condiție: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

Pătratul cosecantei

condiție: $x \neq k\pi$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

Funcția 1/(1+x²)

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Funcția 1/√(1-x²)

condiție: $x \in (-1, 1)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Frație rațională cu rădăcini

condiție: $a > 0, x \neq \pm a$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Arctangenta scalată

condiție: $a > 0$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Arcsinus scalat

condiție: $a > 0, x \in (-a, a)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Logaritm cu rădăcină

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

Integrale ale funcțiilor compuse

Dacă recunoști pe $g'(x)$ în integrand, ai descompus deja problema. Mai jos sunt cele șase forme care apar cel mai des în baremele BAC.

Forma generală (schimbare de variabilă)

condiție: F este o primitivă a lui f

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Derivata pe funcție

condiție: $g(x) \neq 0$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

Exponențială compusă

$$\int g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + C$$

Putere compusă

condiție: $n \neq -1$

$$\int g'(x) \cdot (g(x))^n dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

Cosinus compus

$$\int g'(x) \cdot \cos(g(x)) dx = \sin(g(x)) + C$$

Sinus compus

$$\int g'(x) \cdot \sin(g(x)) dx = -\cos(g(x)) + C$$

Reguli de integrare — substituție și prin părți

Liniaritatea e implicită. Substituția și integrarea prin părți sunt cele două tehnici care rezolvă peste 90% din integralele de BAC.

Liniaritate

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Schimbare de variabilă

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du, \quad u = g(x)$$

Integrarea prin părți

condiție: u, v de clasă C^1

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Prin părți — formă explicită

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Integrale definite — proprietăți esențiale

Toate decurg din formula Leibniz-Newton. Memorează prima și nu trebuie să reții restul — le deduci.

Formula Leibniz-Newton

condiție: F primitivă a lui f , f continuă pe $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Inversarea limitelor

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Aditivitatea după interval

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Funcție impară pe interval simetric

condiție: f impară

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Funcție pară pe interval simetric

condiție: f pară

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Schimbare de variabilă în integrala definită

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Aplicații — arii și volume

La BAC, aplicațiile integralelor sunt aproape exclusiv arii sub grafic, arii între două curbe și volumul corpului de rotație în jurul axei Ox .

Aria sub graficul lui f

condiție: $f \geq 0$ pe $[a, b]$

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$$

Aria între două grafice

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Volumul corpului de rotație în jurul Ox

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Lungimea graficului lui f

condiție: f de clasă C^1

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$