Limite fundamentale — funcții elementare

Limite directe care nu necesită calcule. Le aplici imediat ce recunoști forma.

Limita unei constante
condiție: $c \in \mathbb{R}$, a orice valoare

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Limita funcției identitate

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Limita unei puteri la infinit
condiție: $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & n \text{ par} \\ -\infty, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Limita lui $1/x$ în 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Limita exponențialei la infinit

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Limita logaritmului natural

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Limite remarcabile — cele opt formule de memorat

Acestea sunt limitele pe care le folosești ca pe niște piese de joc. Le recunoști imediat și le aplici direct sau prin substituție $u =$ ceva pentru a aduce expresia la forma de bază.

Limita sinusului

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Limita $1 - \cos x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limita tangentei

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Limita arcsinus

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Limita exponențialei

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Limita logaritmului

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Numărul e ca limită

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Exponențială generală
condiție: $a > 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Binom Newton la limită
condiție: $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

Reguli de calcul

Limita comută cu operațiile elementare, atâta timp cât rezultatele individuale există (nu apar indeterminări).

Liniaritate

$$\lim_{x \to a}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha \lim_{x \to a} f(x) + \beta \lim_{x \to a} g(x)$$

Produsul limitelor
condiție: dacă ambele limite există și sunt finite

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Câtul limitelor
condiție: dacă $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Compunere (substituție)
condiție: dacă f este continuă în $\lim_{x \to a} g(x)$

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\big(\lim_{x \to a} g(x)\big)$$

Indeterminări și regula lui l'Hôpital

Cele șapte indeterminări de bază: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. Pentru primele două, regula l'Hôpital e cea mai rapidă. Pentru restul, transformi expresia până ajungi la $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Regula lui l'Hôpital
condiție: indeterminare $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$; ambele derivate există în vecinătatea lui a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Indeterminare $0 \cdot \infty$
condiție: transformă la $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ ca să poți aplica l'Hôpital

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \text{ sau } \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

Indeterminare 1^∞
condiție: reduce la indeterminarea $0 \cdot \infty$ în exponent

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Indeterminări 0^0 și ∞^0
condiție: același truc — trece la exponențială cu $\ln$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Limite de șiruri

Șirurile sunt funcții cu domeniul $\mathbb{N}$. Toate regulile pentru funcții se aplică, plus câteva criterii specifice care nu au corespondent în funcții.

Limita unui șir geometric	$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \|q\| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{nu există}, & q \leq -1 \end{cases}$$
Criteriul cleștelui	$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ și } \lim a_n = \lim c_n = L \Rightarrow \lim b_n = L$$
Stolz-Cesàro condiție: (b_n) strict crescător, $b_n \to \infty$; limita din dreapta există	$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$
Numărul e ca limită de șir	$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
Convergența șirurilor monotone condiție: criteriul Weierstrass — utilă pentru șiruri definite recursiv	$$(a_n) \text{ monoton și mărginit} \Rightarrow (a_n) \text{ convergent}$$