Definiție și valori esențiale

Logaritmul $\log_a b$ este exponentul la care ridici baza a ca să obții b. Definiția cere $a > 0$, $a \neq 1$ și $b > 0$ — fără ele expresia nu are sens.

Definiția logaritmului
condiție: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Logaritmul lui 1

$$\log_a 1 = 0$$

Logaritmul bazei

$$\log_a a = 1$$

Logaritmul unei puteri a bazei

$$\log_a a^k = k$$

Identitatea fundamentală
condiție: $b > 0$

$$a^{\log_a b} = b$$

Notații consacrate
condiție: $e \approx 2{,}718$

$$\lg b = \log_{10} b, \quad \ln b = \log_e b$$

Proprietăți fundamentale — produs, cât, putere

Cele trei proprietăți care apar pe fiecare BAC. Toate cer condiția $a > 0$, $a \neq 1$ și argumentele strict pozitive — verifică domeniul înainte să aplici.

Logaritmul unui produs
condiție: $x > 0$, $y > 0$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

Logaritmul unui cât
condiție: $x > 0$, $y > 0$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Logaritmul unei puteri
condiție: $x > 0$, $k \in \mathbb{R}$

$$\log_a (x^k) = k \cdot \log_a x$$

Logaritmul unui radical
condiție: $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Putere la bază
condiție: $n \neq 0$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

Putere atât la bază cât și la argument
condiție: $n \neq 0$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

Schimbarea bazei

Când ai logaritmi cu baze diferite în aceeași expresie, treci totul într-o bază comună. Cea mai folosită alegere e baza e (logaritm natural) sau baza 10.

Formula generală
condiție: $c > 0$, $c \neq 1$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Inversa bazei
condiție: $b \neq 1$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Lanț de logaritmi
condiție: $b \neq 1$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Trecere între lg și ln

$$\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10}, \quad \ln b = \frac{\lg b}{\lg e}$$

Ecuații logaritmice

Trei tipuri standard. Prima regulă universală: pune condiția de existență ($a > 0$, $a \neq 1$, argumente > 0) înainte să rezolvi — fără asta pierzi puncte la BAC chiar dacă ai numărul corect.

Egalitate de logaritmi în aceeași bază
condiție: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Logaritm egal cu o constantă
condiție: $f(x) > 0$

$$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$$

Ecuație cu baza variabilă
condiție: $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$

$$\log_{f(x)} g(x) = c \Rightarrow g(x) = f(x)^c$$

Tehnica substituției
condiție: reduce ecuațiile pătratice în $\log_a x$ la o ecuație în t

$$t = \log_a x \Rightarrow x = a^t$$

Inecuații logaritmice — regula sensului

Aceeași regulă pe care o uită toți în clasa a 10-a: funcția $\log_a$ e crescătoare dacă $a > 1$ și descrescătoare dacă $0 < a < 1$. Sensul inecuației se păstrează în primul caz și se schimbă în al doilea.

Bază supraunitară
condiție: $a > 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) > 0$$

Bază subunitară
condiție: $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow 0 < f(x) < g(x)$$

Logaritm față de o constantă (bază $>$ 1) condiție: $a > 1$, $f(x) > 0$	$\log_a f(x) > c \Rightarrow f(x) > a^c$
Logaritm față de o constantă (bază $<$ 1) condiție: $0 < a < 1$	$\log_a f(x) > c \Rightarrow 0 < f(x) < a^c$