Operații pe matrice

Suma se face element cu element (matricele trebuie să aibă același format). Produsul cere ca numărul de coloane al primei matrice să egaleze numărul de linii al celei de-a doua.

Suma a două matrice
condiție: A și B de același format $m \times n$

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Produs cu un scalar
condiție: $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

Produsul a două matrice
condiție: A este $m \times p$, B este $p \times n$, rezultat $m \times n$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Necomutativitatea produsului
condiție: chiar și când ambele produse există

$$A \cdot B \neq B \cdot A \text{ în general}$$

Transpusa
condiție: interschimbi liniile cu coloanele

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Transpusa unui produs
condiție: ordinea se inversează

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Determinanți — formulele Sarrus și Laplace

Pentru matrice de ordin 2, formula e directă. Pentru ordin 3, folosești regula lui Sarrus (cele șase produse cu diagonalele). Pentru ordin ≥ 4, dezvolți după o linie sau coloană (Laplace).

Determinant de ordin 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Determinant de ordin 3 — Sarrus
condiție: trei produse pe diagonalele descrescătoare minus trei produse pe diagonalele crescătoare

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Dezvoltare Laplace (după linia i)
condiție: M_{ij} — minorul (det. matricei obținute prin eliminarea liniei i și coloanei j)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}$$

Determinantul unui produs
condiție: A, B pătratice, de același ordin

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Determinantul transpusei	$\det(A^t) = \det A$
Determinant cu scalar condiție: A de ordin n	$\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$

Proprietăți ale determinanților

Aceste proprietăți simplifică drastic calculele — învață să le recunoști înainte să dezvolți Sarrus sau Laplace.

Linie sau coloană de zerouri condiție: dacă o linie (sau coloană) este formată din zerouri	$\det A = 0$
Două linii sau coloane egale condiție: dacă două linii (sau două coloane) sunt egale	$\det A = 0$
Linii proporționale condiție: dacă o linie este multiplu al alteia	$\det A = 0$
Schimbarea a două linii	$\text{schimbi 2 linii} \Rightarrow \det A \text{ își schimbă semnul}$
Adăugarea unui multiplu al unei linii condiție: regula de transformare elementară fără efect asupra determinantului	$\det A \text{ se păstrează când adaugi la o linie un multiplu al altei linii}$

Matricea inversă

O matrice A este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$. Inversa se calculează prin formula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, unde A^* este matricea adjunctă (transpusa matricei cofactorilor).

Criteriul de inversabilitate	$A \text{ inversabilă} \iff \det A \neq 0$
Formula matricei inverse condiție: $A^* = (A_{ij})^t$ — adjuncta (transpusa cofactorilor)	$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$
Inversa pentru matrice 2×2 condiție: $ad - bc \neq 0$	$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Inversa unui produs condiție: ordinea se inversează	$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
Determinantul inversei	$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Sisteme de ecuații — regula lui Cramer

Un sistem liniar $A \cdot X = B$ cu A matrice pătratică se rezolvă prin Cramer dacă $\det A \neq 0$. Atunci sistemul are soluție unică, iar fiecare necunoscută se exprimă printr-un raport de determinanți.

Formula lui Cramer condiție: A_i — matricea obținută înlocuind coloana i a lui A cu coloana termenilor liberi	$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$
Compatibilitate	$\det A \neq 0 \Rightarrow$ sistem compatibil determinat (soluție unică)
Determinant nul — cazul ambiguu condiție: decizi după rangul matricei extinse (Kronecker-Capelli)	$\det A = 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil sau compatibil nedeterminat
Sistem omogen ($B = 0$)	$\det A \neq 0 \Rightarrow$ soluție unică $X = 0$; $\quad \det A = 0 \Rightarrow$ soluții nebanale