Forma algebrică — definiție și operații

Un număr complex $z = a + bi$ are partea reală $a = \mathrm{Re}(z)$ și partea imaginară $b = \mathrm{Im}(z)$. Operațiile elementare se fac ca în algebră, ținând cont că $i^2 = -1$.

Definiția unității imaginare
condiție: puterile lui i se repetă cu perioada 4

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

Sumă

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Produs

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Conjugatul
condiție: schimbi semnul părții imaginare

$$\overline{z} = a - bi$$

Modulul
condiție: distanța de la origine la z în planul complex

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Câtul
condiție: $z_2 \neq 0$; truc: amplifici cu conjugatul

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Proprietățile modulului și conjugatului

Aceste opt proprietăți rezolvă majoritatea cerințelor BAC. Modulul respectă produsele, conjugatul respectă orice operație elementară.

Produsul cu conjugatul

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Modulul unui produs

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Modulul unui cât
condiție: $z_2 \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Modulul unei puteri

$$|z^n| = |z|^n$$

Conjugatul unei sume

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Conjugatul unui produs

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Caracterizarea realelor

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

Caracterizarea imaginar pur
condiție: echivalent: $\mathrm{Re}(z) = 0$

$$z + \overline{z} = 0 \iff z \text{ imaginar pur}$$

Forma trigonometrică

Reprezentarea $z = r(\cos t + i \sin t)$ separă mărimea ($r = |z|$) de direcția ($t = \arg z$, unghiul cu axa Ox). Esențială pentru puteri și rădăcini.

Forma trigonometrică
condiție: $r = |z|$, $t = \arg z \in [0, 2\pi)$

$$z = r(\cos t + i \sin t)$$

Modulul din forma algebrică

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumentul din forma algebrică
condiție: alege t în cadranul corect după semnele lui a și b

$$\cos t = \frac{a}{r}, \quad \sin t = \frac{b}{r}$$

Produsul în formă trigonometrică
condiție: module se înmulțesc, argumente se adună

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)\big)$$

Câtul în formă trigonometrică
condiție: module se împart, argumente se scad

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)\big)$$

Formula lui Moivre și rădăcini

Moivre îți dă orice putere a unui complex direct, fără calcule iterate. Pentru rădăcini, ai exact n valori distincte distribuite simetric pe un cerc.

Formula lui Moivre
condiție: $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = r^n \big(\cos(nt) + i \sin(nt)\big)$$

Rădăcinile de ordin n
condiție: $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ — exact n valori distincte

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right)$$

Rădăcinile de ordin n ale unității
condiție: $k = 0, 1, \ldots, n-1$; pe cercul unitate, distribuite simetric

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$$

Suma rădăcinilor de ordin n ale unității
condiție: $n \geq 2$ — sumă de vectori echidistanți pe cerc

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1} = 0$$

Produsul rădăcinilor de ordin n ale unității

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_{n-1} = (-1)^{n+1}$$