Progresie aritmetică — definiție și termen general

O progresie aritmetică este un șir în care fiecare termen se obține adunând o constantă (rația r) la termenul anterior. Notația standard: $(a_n)_{n\geq 1}$ cu a_1 primul termen și r rația.

Definiția prin recurență
condiție: $r \in \mathbb{R}$ — rația, constantă pentru toți n

$$a_{n+1} - a_n = r$$

Termenul general
condiție: exprimă orice termen în funcție de a_1 și r

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Termen general în funcție de un termen oarecare

$$a_n = a_m + (n-m) \cdot r$$

Termenul de mijloc — trei termeni consecutivi
condiție: echivalent: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

Caracterizare prin trei termeni

$$a, b, c \text{ în PA} \iff b = \frac{a+c}{2}$$

Progresie aritmetică — suma primilor n termeni

Trucul lui Gauss: suma primilor și ultimului termen e mereu aceeași, iar perechile sunt $n/2$. De aici toate variantele formulei.

Suma — varianta cu primul și ultimul termen

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Suma — varianta cu a_1 și rația
condiție: utilă când nu ai a_n calculat

$$S_n = \frac{\big(2a_1 + (n-1)r\big) \cdot n}{2}$$

Suma primelor n numere naturale
condiție: caz particular cu $a_1 = 1, r = 1$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suma primelor n numere impare
condiție: PA cu $a_1 = 1, r = 2$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Progresie geometrică — definiție și termen general

O progresie geometrică este un șir în care fiecare termen se obține înmulțind o constantă (rația q) cu termenul anterior. Pentru a avea sens, niciun termen nu poate fi zero — deci $a_1 \neq 0$ și $q \neq 0$.

Definiția prin recurență condiție: $q \neq 0$ și $a_n \neq 0$ pentru toți n	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
Termenul general	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Termen general în funcție de un termen oarecare	$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$
Termenul de mijloc — trei termeni consecutivi condiție: pentru termeni de același semn: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$	$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$
Caracterizare prin trei termeni condiție: a, c de același semn pentru ca b să fie real	$a, b, c \text{ în PG} \iff b^2 = a \cdot c$

Progresie geometrică — suma primilor n termeni

Pentru sumă, totul depinde dacă rația este 1 sau diferită de 1. Pentru $|q| < 1$ există și suma infinită — formula care apare în limite și serii.

Suma — caz general condiție: $q \neq 1$	$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Suma — caz $q = 1$ condiție: $q = 1$ — toți termenii sunt a_1	$S_n = n \cdot a_1$
Suma infinită — progresie geometrică subunitară condiție: $\|q\| < 1$ — singurul caz în care suma converge	$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$
Formă utilă cu a_n condiție: $q \neq 1$ — derivă direct din formula generală	$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$

Tehnici uzuale — trei termeni consecutivi și recurențe

Două tipare apar pe aproape orice problemă cu progresii: alegerea convenabilă a notației pentru trei termeni consecutivi și recunoașterea unei recurențe lineare ca PA sau PG.

Trei termeni în PA — notație convenabilă condiție: suma celor trei termeni este $3a$, ușor de exploatat	$a - r, \quad a, \quad a + r$

Trei termeni în PG — notație convenabilă condiție: produsul celor trei termeni este a^3	$\frac{a}{q}, \quad a, \quad a \cdot q$
Recurență lineară $\to$ PA condiție: orice șir cu această recurență e o PA cu rația r	$a_{n+1} = a_n + r$
Recurență lineară $\to$ PG condiție: $a_1 \neq 0$ — orice șir cu această recurență e o PG cu rația q	$a_{n+1} = a_n \cdot q$
Număr zecimal periodic ca PG infinită condiție: perioada are k cifre $\Rightarrow$ numitor cu k de 9	$0{,}\overline{abc} = \frac{abc}{999} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{abc}{10^{3n}}$