



Polinomul

$$f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d, \quad a \neq 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 , adică $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

CELE 3 SUME

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \quad S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Cum le ții minte: semnele alternează $-$, $+$, $-$, iar sus coboară pe rând b , c , d — mereu împărțit la a . Din acest punct încolo lucrezi doar cu S_1, S_2, S_3 — nu mai înlocuiești cu a, b, c, d .

Suma pătratelor

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$$

De unde vine: ridici S_1 la pătrat și scazi ce e în plus:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \underbrace{2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{S_2}$$

Suma inverselor

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{S_2}{S_3} \quad (S_3 \neq 0)$$

De unde vine: aduci la același numitor:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{\overbrace{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}^{S_2}}{\underbrace{x_1x_2x_3}_{S_3}}$$

Suma inverselor produselor

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3} = \frac{S_1}{S_3} \quad (S_3 \neq 0)$$

De unde vine: numitorul comun e $x_1x_2x_3$, iar fiecare fracție se completează cu factorul care îi lipsește:

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3} = \frac{\overbrace{x_3 + x_1 + x_2}^{S_1}}{\underbrace{x_1x_2x_3}_{S_3}}$$



Suma cuburilor

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$$

De unde vine: aici folosești chiar faptul că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini — fiecare verifică ecuația $f(x) = 0$. Scrii cele 3 relații una sub alta și le aduni:

$$\begin{aligned} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d &= 0 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d &= 0 \\ ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d &= 0 \quad (+) \\ \hline a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + c(x_1 + x_2 + x_3) + 3d &= 0 \end{aligned}$$

Împarți la a și înlocuiești $\frac{b}{a} = -S_1, \frac{c}{a} = S_2, \frac{d}{a} = -S_3$:

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - S_1 \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}_{S_1^2 - 2S_2} + S_2S_1 - 3S_3 = 0$$

De unde:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = S_1(S_1^2 - 2S_2) - S_1S_2 + 3S_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$$

Atenție la $3d$: constanta d apare o dată în fiecare din cele 3 ecuații, deci la adunare devine $3d$ (nu d). La fel, $3S_3$ în formula finală.

EXEMPLU

$$f(X) = 2X^3 - 6X^2 + 4X - 8 \quad (a = 2, b = -6, c = 4, d = -8)$$

$$S_1 = -\frac{-6}{2} = 3, \quad S_2 = \frac{4}{2} = 2, \quad S_3 = -\frac{-8}{2} = 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = 3^2 - 2 \cdot 2 = 5 \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{S_2}{S_3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3} = \frac{S_1}{S_3} = \frac{3}{4} \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 = 27 - 18 + 12 = 21$$